

Résolution d'un Problème de Cauchy en EEG

Abdellatif EL-BADIA, Maha FARAH, Tuong HA-DUONG, Vincent PAVAN*

* Université de Technologie de Compiègne - Laboratoire de Mathématiques Appliquées
B.P. 20529 - 60205 Compiègne Cedex - FRANCE
Email : mfarah@dma.utc.fr

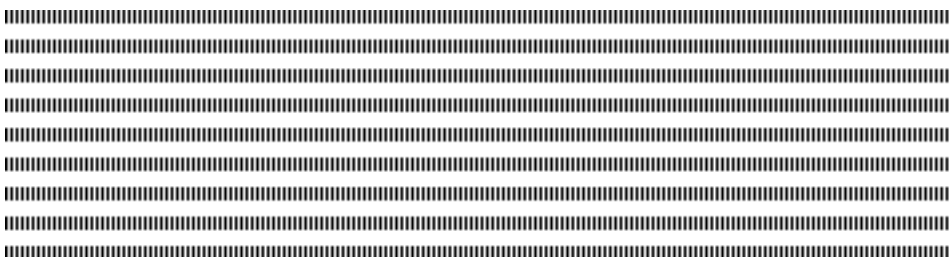


RÉSUMÉ. Dans cet article, nous traitons un problème de Cauchy dans le cadre de la localisation des sources épileptiques en Electro-Encéphalo-Graphie (EEG). Plus particulièrement, il s'agit du problème de construction des données de Cauchy sur la surface du cerveau à partir des données du potentiel mesuré par l'EEG à la surface de la tête. Notre résolution est basée sur un algorithme itératif alternatif initialement proposé par *Kozlov, Maz'ya et Fomin* [16]. Nous présentons dans ce papier l'étude numérique de cette méthode que nous avons implémentée dans R^3 . Nous donnons également des applications et des résultats numériques.

ABSTRACT. This paper talks about the resolution of the Cauchy problem that appears in the localization of epileptic sources on Electro-Encephalo-Graphy (EEG). We treat specially the problem of estimating Cauchy data over the layer of the brain, knowing only the ones on the scalp measured by EEG. As a method of resolution, we choose an alternating iterative algorithm first proposed by *Kozlov, Maz'ya and Fomin* [16]. In this paper, we study numerically this method in R^3 . We give also some numerical examples.

MOTS-CLÉS : Problème de Cauchy, Equations intégrales, Méthode alternative itérative, Electro-Encéphalo-Graphie (EEG).

KEYWORDS : Cauchy Problem, Integral Equations, Alternating Iterative Method, Electro-Encephalo-Graphy (EEG).



TamTam'05

1. Introduction

Le cadre de ce papier se situe dans le thème des problèmes inverses de sources en Electro-Encéphalo-Graphie (EEG). Il s'agit de déterminer la localisation de foyers épileptogènes qui sont à l'origine de signaux EEG mesurés au moyen d'électrodes placées sur le scalp. C'est une méthode non invasive dont la résolution temporelle est l'ordre de la milliseconde [12].

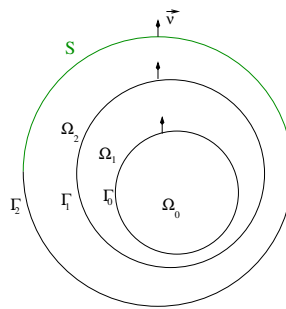


Figure 1.

Le problème direct en EEG consiste à calculer les potentiels recueillis sur la peau qu'engendrent une configuration de sources connues. Cela nécessite une bonne connaissance de la géométrie de la tête ainsi que les propriétés de conduction dans les tissus cérébraux [9].

Le problème inverse qui nous concerne ici, consiste à estimer la distribution des dipôles électrostatiques ayant produit les potentiels électriques mesurés sur la peau par l'EEG au moyen des électrodes. De façon précise, nous cherchons à déterminer, le nombre de dipôles, leurs positions et leurs amplitudes.

Dans la suite de ce travail nous supposons les conductivités connues, et considérons un modèle couramment accepté de la tête, défini par une géométrie de couches concentriques représentant des milieux différents (Scalp, Crâne, Liquide Cérébrospinal, matières grise et blanche, etc...), chacun étant considéré comme homogène et isotrope (admettant une conductivité scalaire constante). Dans le cadre de ce travail, nous prenons un modèle de tête de 3 couches $\cup_{j=0}^2 \Omega_j$ (Fig. 1), qui représentent de l'extérieur vers l'intérieur : Ω_2 pour le Scalp, Ω_1 pour le Crâne et Ω_0 pour le Cerveau. Nous notons par Γ_j l'interface entre Ω_j, Ω_{j+1} pour $j = 0, 1$, par Γ_2 la surface extérieure du Scalp et par S la partie de

TamTam'05

TamTam'05

avec f et g sont deux données compatibles avec $f \in H^{1/2}(S)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$. Notons que dans le cas du problème inverse en EEG $g = 0$ en raison de la non conductivité de l'air.

Pour la résolution numérique du problème (1) nous avons choisi une méthode alternative itérative initialement proposée par *Kozlov, Maz'ya et Fomin* [16]. Nous présentons deux approches, la première que nous nommons "*approche successive*" consiste à appliquer l'algorithme de *Kozlov et al* successivement, d'abord dans le scalp ensuite dans le crâne. La deuxième dite "*approche simultanée*" consiste à appliquer le même algorithme simultanément sur, le scalp et l'os.

La suite de cet article se compose de la façon suivante. Dans la deuxième section, nous poserons le problème de Cauchy et présenterons la méthode itérative de *Kozlov*, pour les deux approches "successive" et "simultanée". Nous donnerons également la formulation en équations intégrales des problèmes directs intervenant dans les deux approches. La troisième section est dédiée aux résultats numériques (implémentés sur un modèle sphérique) où nous comparerons entre les deux approches "*successive*" et "*simultanée*". Enfin, nous tirons quelques conclusions de ces expériences numériques à la dernière section.

2. Résolution du problème de Cauchy

Dans cette section, nous présentons les deux approches "successive" et "simultanée" pour résoudre notre problème de Cauchy. Mais avant cela, nous allons décrire brièvement ce problème et introduire la méthode choisie.

Le problème de Cauchy consiste à déterminer la solution sur les parties inaccessibles d'un domaine à partir des données dites "Données de Cauchy" connues partiellement sur la frontière. Ce problème admet une solution unique si les données sont compatibles (*i.e.* si elles constituent la trace et trace normale d'une certaine fonction harmonique). Mais, ce problème est mal-posé dans le sens où une légère perturbation des données à la frontière entraîne une grande incertitude sur la solution à l'intérieur du domaine [11].

Plusieurs méthodes de régularisation ont été proposées pour résoudre le problème de Cauchy. Nous citons parmi elles la méthode de quasi-réversibilité [17], [3], (voir aussi les références qui y sont citées) qui consiste à transformer le problème de Cauchy en un problème bien posé mais d'ordre plus élevé. Autres méthodes comme la méthode de régularisation de Tikhonov qui consiste à régulariser le problème de Cauchy à l'aide des

TamTam'05

TamTam'05

Dans les deux cas, il s'agit de résoudre deux fois un problème de Cauchy dans une couronne qui s'écrit comme suivant :

$$(PC_{suc}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = f & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \end{cases}$$

où Ω est une couronne dans R^3 (Fig. 2) représentant le domaine entre deux couches de la tête, Γ_e la surface extérieure de la couronne et Γ_i est la surface intérieure, S une partie stricte de Γ_e pour la première couronne (le Scalp), et $S = \Gamma_e$ pour la deuxième couronne (le Crâne) avec les données de Cauchy $f \in H^{1/2}(S)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma_e)$ supposées compatibles. Notre but est de déterminer les valeurs inconnues du potentiel u et du flux $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur Γ_i .

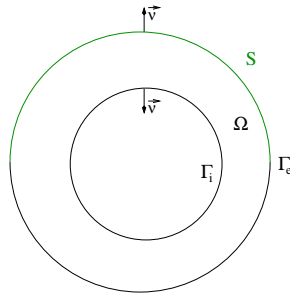


Figure 2.

2.1.1. Le schéma de l'algorithme itératif de Kozlov dans une couronne

L'algorithme proposé par *Kozlov et al* se base sur un choix initial quelconque d'une estimation du potentiel (ou du flux) sur la surface intérieure (Γ_i). Et, il s'arrête quand les deux suites formées par la trace et la trace normale du potentiel sur Γ_i deviennent stationnaire. Un autre critère d'arrêt pourrait être la stationnarité de la suite du potentiel ; ce choix sera justifié par les résultats numériques dans la section suivante.

Pour le problème (PC_{suc}) , l'algorithme est le suivant :

- Etant donné $f^0 \in H^{1/2}(\Gamma_i)$ une approximation initiale du potentiel sur Γ_i .
- Résoudre :

$$(P1_{suc}) \begin{cases} -\Delta u^{2n+1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{2n+1} = f^n \text{ sur } \Gamma_i, & \partial_\nu u^{2n+1} = g \text{ sur } \Gamma_e \end{cases}$$

TamTam'05

TamTam'05

– Puis résoudre :

$$(P2_{sim}) \begin{cases} -\Delta u^{2n+2} = 0 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ [u^{2n+2}] = 0 \text{ sur } \Gamma_1, & [\sigma \partial_\nu u^{2n+2}] = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \partial_\nu u^{2n+2} = g^n \text{ sur } \Gamma_0, & u^{2n+2} = f \text{ sur } S, \quad \partial_\nu u^{2n+2} = g \text{ sur } \Gamma_2 \setminus S \end{cases}$$

Poser $f^{n+1} = u|_{\Gamma_0}^{2n+2}$.

2.3. La résolution d'un problème aux conditions limites mêlées

A chaque itération de l'algorithme nous avons un problème du Laplacien aux conditions mêlées.

Pour l'approche successive nous avons à résoudre les problèmes suivants :

$$(P1_{suc}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi & \text{sur } \Gamma_i \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \end{cases} \quad (P2_{suc}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_\nu u = \psi & \text{sur } \Gamma_i \\ u = f & \text{sur } S \subset \Gamma_e \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_e \setminus S \end{cases}$$

ici ϕ et ψ représentent des fonctions appartenant respectivement à $H^{1/2}(\Gamma_i)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_i)$, et f et g sont les données de Cauchy ($f \in H^{1/2}(S)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma_e)$). Le domaine Ω désigne la couronne mentionnée par (Fig 2).

Et, pour l'approche simultanée nous avons à résoudre :

$$(P1_{sim}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ u = \phi & \text{sur } \Gamma_0 \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ [\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (P2_{sim}) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{sur } \Gamma_0 \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ [\sigma \partial_\nu u] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = f & \text{sur } S \subset \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_2 \setminus S \end{cases}$$

avec $\phi \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ et $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, $f \in H^{1/2}(S)$ et $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ (Fig 1).

Ces problèmes sont bien posés pour des données compatibles. Pour les résoudre, nous utilisons la méthode des éléments de frontière (équations intégrales). D'une part, elle est bien adaptée à la géométrie des domaines considérés. D'autre part, comme nous n'avons pas besoin des valeurs intérieures aux domaines, nous avons préféré éviter la méthode d'éléments finis qui nous obligerait à travailler sur un maillage 3D plutôt compliqué, ainsi que sur des interpolations géométriques aux surfaces séparant les domaines.

TamTam'05

TamTam'05

et dans Ω_2 , et nous prenons la trace sur leurs frontières respectives. Nous obtenons alors :

dans Ω_2 :

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_2 : & -D_{2,1}u_1 + S_{2,1}(\partial_\nu u)_1^+ & = -(\frac{I_2}{2} + D_{2,2})u_2 + S_{2,2}(\partial_\nu u)_2^- \\ \text{sur } \Gamma_1 : & (\frac{I_1}{2} - D_{1,1})u_1 + S_{1,1}(\partial_\nu u)_1^+ & = -D_{1,2}u_2 + S_{1,2}(\partial_\nu u)_2^- \end{cases}$$

et dans Ω_1 :

$$\begin{cases} \text{sur } \Gamma_1 : & (\frac{I_2}{2} + D_{1,1})u_1 - S_{1,1}(\partial_\nu u)_1^- & = D_{1,0}u_0 - S_{1,0}(\partial_\nu u)_0^+ \\ \text{sur } \Gamma_0 : & D_{0,1}u_1 - S_{0,1}(\partial_\nu u)_1^- & = (-\frac{I_0}{2} + D_{0,0})u_0 - S_{0,0}(\partial_\nu u)_0^+ \end{cases}$$

Notons que ici le vecteur normal $\vec{\nu}$ est orienté vers l'extérieur comme le montre la figure (Fig. 1), et $(\partial_\nu u)_j^-$ est la limite intérieure du flux à travers la surface Γ_j et $(\partial_\nu u)_j^+$ est la limite extérieure.

Nous considérons les deux équations écrites sur Γ_1 , en tenant compte de la continuité de $\sigma \partial_\nu u$, nous exprimons u_1 et $\sigma_1 (\partial_\nu u)_1^-$ en fonction des valeurs sur Γ_0 et Γ_2 . Puis, nous les remplaçons dans les équations écrites sur Γ_0 et Γ_2 . Pour obtenir à la fin le système suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{02} \\ A_{20} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 (\partial_\nu u)_0^- \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{02} \\ B_{20} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \sigma_2 (\partial_\nu u)_2^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{00} & = S_{0,0} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{0,1} H_{1,1}^{-1} S_{1,0} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{0,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} - D_{1,1}) S_{1,0} \\ A_{02} & = -\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{0,1} H_{1,1}^{-1} D_{1,2} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{0,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} + D_{1,1}) D_{1,2} \\ A_{20} & = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{2,1} H_{1,1}^{-1} S_{1,0} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{2,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} - D_{1,1}) S_{1,0} \\ A_{22} & = \sigma_2 (\frac{I_2}{2} + D_{2,2}) + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{2,1} H_{1,1}^{-1} D_{1,2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{2,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} + D_{1,1}) D_{1,2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B_{00} & = -\sigma_1 (\frac{I_0}{2} - D_{0,0}) - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{0,1} H_{1,1}^{-1} D_{1,0} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{0,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} - D_{1,1}) D_{1,0} \\ B_{02} & = -\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{0,1} H_{1,1}^{-1} S_{1,2} + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{0,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} + D_{1,1}) S_{1,2} \\ B_{20} & = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{2,1} H_{1,1}^{-1} D_{1,0} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{2,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} - D_{1,1}) D_{1,0} \\ B_{22} & = S_{2,2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} D_{2,1} H_{1,1}^{-1} S_{1,2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} S_{2,1} S_{1,1}^{-1} H_{1,1}^{-1} (\frac{I_1}{2} + D_{1,1}) S_{1,2} \end{cases}$$

TamTam'05

TamTam'05

3.1.1. Cas de données complètes sur le bord extérieur

Nous supposons les mesures connues sur toute la surface extérieure de la couronne et nous étudions le comportement de l'algorithme en fonction du choix initial f^0 , en fonction de l'épaisseur de la couronne et en fonction de la perturbation des données.

3.1.1.1. Résultats obtenus en fonction du choix initial

Pour le choix de l'estimation initiale f^0 du potentiel u_i , nous avons pris $f^0 = 0$ et f^0 quelconque sur la surface intérieure Γ_i . Nous traçons dans la figure (Fig. 3) le logarithme en base 10 de l'erreur relative en norme L^2 sur Γ_i entre les valeurs calculées du potentiel u_i et du flux $\frac{\partial u}{\partial \nu}_i$ et les valeurs exactes en fonction du nombre d'itérations.

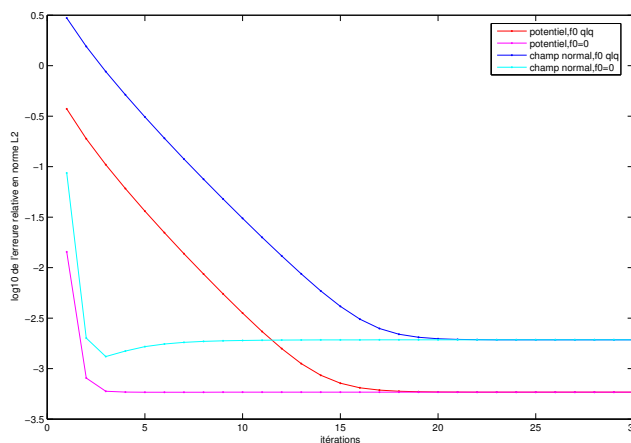


Figure 3.

Nous constatons alors que la suite calculée $(f^n)_n$ du potentiel sur Γ_i tend vers une solution proche de la solution exacte avec une précision relative d'ordre 0.058% à partir de la 5^{ème} itération pour un choix initial nul et à partir de la 16^{ème} itération pour un choix initial quelconque.

Egalement, la suite du flux $(g^n)_n$ évolue vers une solution proche de la solution exacte avec une précision relative d'ordre 0.18% à partir de la 13^{ème} itération pour un choix initial nul et à partir de la 20^{ème} itération pour un choix initial quelconque.

Ces résultats nous permettent de constater que le choix initial n'influe pas sur la précision mais seulement sur le nombre d'itération, et que la précision relative sur le flux est

TamTam'05

TamTam'05

Nous remarquons alors, de façon relativement intuitive, que la précision sur le calcul du potentiel et du flux augmente avec la diminution de l'épaisseur de la couronne. Ce qui "valide" notre choix de cette méthode pour résoudre le problème de Cauchy en EEG.

3.1.1.3. Etude du comportement de l'algorithme en fonction de la perturbation des données

Dans ce paragraphe nous étudions le comportement de l'algorithme de *Kozlov et al* en fonction des perturbations des données sur la surface extérieure de la couronne. Nous ajoutons aux données u_e et $(\partial_\nu u)_e$ un bruit gaussien d'amplitudes respectives $p = 0, 0.1, 0.5, 1, 3,$ et 5% .

Nous traçons dans les figures (Fig. 5) et (Fig. 6) respectivement la variation de l'erreur relative sur le potentiel et le flux calculés sur Γ_i en fonction du nombre d'itérations pour des données perturbées.

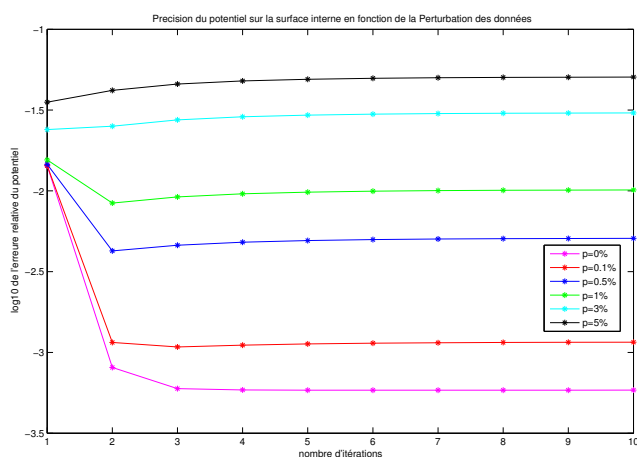


Figure 5.

Nous remarquons sur ces deux figures que l'algorithme de *Kozlov et al* est sensible aux perturbations des données sur le bord extérieur de la couronne, et surtout le calcul du flux qui devient de plus en plus imprécis avec l'augmentation de la perturbation.

Ces résultats nous montrent également l'aspect régularisant de l'algorithme pour de faibles perturbations. Mais pour de grandes perturbations, cet algorithme tel quel n'est plus effi-

TamTam'05

TamTam'05

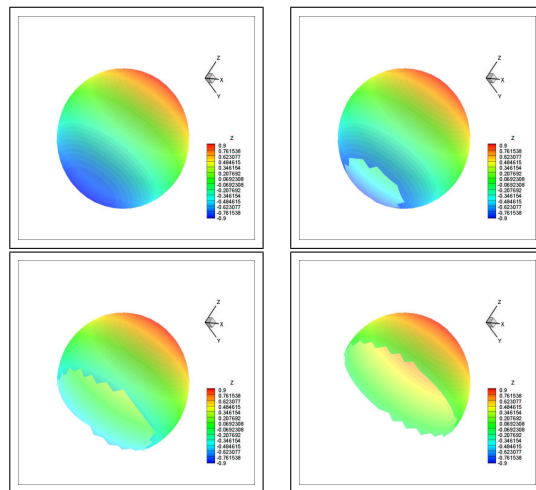


Figure 7.

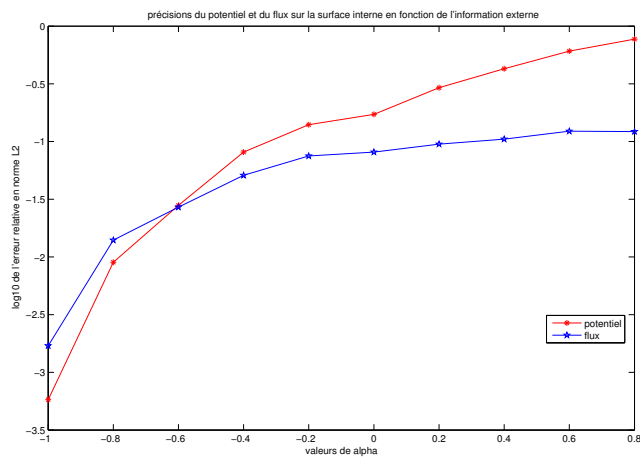


Figure 8.

TamTam'05

TamTam'05

intéressantes.

D'une part, les applications numériques faites sur une couronne sphérique de faible épaisseur ont montré un bon comportement numérique assuré par un faible nombre d'itérations avec une bonne précision relative.

Cette précision diminue avec le manque d'informations sur la surface extérieure de la couronne et avec la perturbation des données.

D'autre part, la résolution du problème de Cauchy dans tout le domaine de la tête (modèle sphérique) nous a permis de conclure que résoudre le problème simultanément est beaucoup mieux de le résoudre successivement.

Pour pallier aux insuffisances de l'algorithme de *Kozlov*, dans un premier temps nous élaborerons une méthode de complétion de données. Ensuite nous tâcherons de transporter le calcul des *Reciprocity Gap* pour la méthode algébrique appliquée dans le cerveau, à un calcul sur la surface du scalp en fonction des mesures et des traces des fonctions tests sur le scalp. Ainsi, on serait amené à résoudre le problème de Cauchy en partant des données (traces des fonctions tests) sur la surface du cerveau pour les transmettre à la surface du scalp. L'intérêt de cette approche est qu'on résoudra un problème de Cauchy sur des données complètes et non bruitées. Ce travail est en cours de rédaction.

5. Bibliographie

- [1] S. ANDRIEUX , T.N. BARANGER , A. BEN ABDA Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems* **22** (115-133), 2006.
- [2] L. BARATCHART , A. BEN ABDA , F. BEN HASSEN AND J. LEBLOND , Recovery of point-wise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation, *Inverse Problems* **21** (51-74), 2005.
- [3] L. BOURGEOIS A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, *Inverse Problems* **21** (1087-1104), 2005.
- [4] M. CHAFIK , A. EL-BADIA , T. HA-DUONG, On some inverse EEG problems, *Inverse Problems Eng. Mech.* **II** (537-544), 2000.
- [5] A. CIMETIÈRE , F. DELVARE , M. JAOUA , F. PONS Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization, *Inverse Problems* **17** (553-570), 2001.
- [6] A. EL-BADIA Inverse source problem in an anisotropic medium by boundary measurements, *Inverse Problems* **21** (1787-1806), 2005.
- [7] A. EL-BADIA, M. FARAH Identification of dipole sources in an elliptic equation from boundary measurements, à paraître dans *J. of Inverse and Ill-posed Problems*.

TamTam'05

