

2007 International Conference in Honor of Claude Lobry

## Sur le retard à la bifurcation

Augustin Fruchard <sup>a,\*</sup> — Reinhard Schäfke <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications  
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace  
4, rue des Frères Lumière, F-68093 Mulhouse cedex, France

\* Corresponding author : Augustin.Fruchard@uha.fr

<sup>b</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée  
U.F.R. de Mathématiques et Informatique  
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.  
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France  
schafke@math.u-strasbg.fr



**RÉSUMÉ.** Nous donnons un aperçu non exhaustif du problème du retard à la bifurcation, depuis son apparition en France à la fin des années 1980 jusqu'aux contributions les plus récentes. Le problème et les résultats sont présentés d'une part pour les équations différentielles et d'autre part pour les systèmes dynamiques discrets.

**ABSTRACT.** We give a non-exhaustive overview of the problem of bifurcation delay from its appearance in France at the end of the 80ies to the most recent contributions. We present the bifurcation delay for differential equations as well as for discrete dynamical systems.

**MOTS-CLÉS :** retard à la bifurcation, bifurcation dynamique, canard, perturbation singulière, surstabilité, bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, équation différentielle complexe.

**KEYWORDS :** bifurcation delay, dynamic bifurcation, canard, singular perturbation, overstability, Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation, ordinary differential equation in the complex plane.

























- Si  $\varepsilon \ln |a|$  est appréciable négatif, i.e. si  $|a|$  est de la forme  $\exp\left(-\frac{l+\mathcal{O}}{\varepsilon}\right)$ , avec  $l$  standard positif, alors le portrait de phase présente des butées en  $-x^*$  et  $x^*$ , avec  $x^* = \sqrt{2l}$  : une orbite entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse  $x_e \in ]-x^*, 0[$  en sortira à l'abscisse  $x_s = -x_e$ . En revanche une orbite entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse strictement inférieure à  $-x^*$  en sortira à l'abscisse  $x^*$ . De manière symétrique, pour tout standard  $x_s \geq x^*$ , il existe des orbites entrant dans le halo de la courbe lente à l'abscisse  $-x^*$  et en sortant à l'abscisse  $x_s$ .
- Si  $\varepsilon \ln |a|$  est i-petit, alors il n'y a pas de canard.

PREUVE. Soit  $y$  une solution entrant dans le halo de la courbe lente à une abscisse standard  $x_e < 0$ . Par symétrie, on peut supposer que cette entrée se fait par le haut. Ainsi, il existe  $x_0 \simeq x_e$  tel que  $y(x_0) = 1$ . La formule de la variation de la constante donne

$$y(x) = e^{(x^2-x_0^2)/(2\varepsilon)} + a I(x) \tag{14}$$

avec 
$$I(x) = \int_{x_0}^x e^{(x^2-u^2)/(2\varepsilon)} du.$$

Dans le cas où  $x_0 \leq x \leq 0$ , on a  $0 \leq I(x) \leq I(0) \leq \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}} \simeq 0$ , donc  $y(x)$  est i-petit dès que  $(x^2 - x_0^2)/(2\varepsilon)$  est i-grand négatif, en particulier lorsque  $x_e \lesssim x \leq 0$ .

Dans le cas où  $x \geq 0$ ,  $I(x)$  est de la forme  $I(x) = \sqrt{\varepsilon} e^{x^2/(2\varepsilon)} \textcircled{a}$ . Il s'ensuit que, lorsque  $|x| \lesssim \sqrt{-2\varepsilon \ln |a|}$  le terme  $a I(x)$  est i-petit et lorsque  $|x| \gtrsim \sqrt{-2\varepsilon \ln |a|}$  ce terme est i-grand.

- Si  $\varepsilon \ln |a|$  est i-grand négatif ou si  $a = 0$ , alors le terme  $a I(x)$  est i-petit pour tout  $x$  limité, donc  $y(x)$  est i-petit lorsque  $(x^2 - x_0^2)/(2\varepsilon)$  est i-grand négatif, en particulier lorsque  $x_e \lesssim |x| \lesssim -x_e$ , et  $y(x)$  est i-grand lorsque  $|x| \gtrsim |x_e|$ . L'abscisse de sortie est donc bien  $x_s = -x_e$ .
- Si  $\varepsilon \ln |a| \simeq -l$  avec  $l$  standard positif, alors le terme  $a I(x)$  est i-petit pour tout  $x$  tel que  $|x| \lesssim x^* := \sqrt{2l}$  et ce terme est i-grand lorsque  $|x| \gtrsim x^*$ . Si  $|x_e| < x^*$ , on a donc  $y(x)$  i-petit lorsque  $|x| \lesssim |x_e|$  et  $y(x)$  i-grand lorsque  $|x| \gtrsim |x_e|$  et l'abscisse de sortie est encore  $x_s = -x_e$ . En revanche, si  $|x_e| > x^*$ , on a  $y(x)$  i-petit lorsque  $x_e \lesssim x \lesssim x^*$  et i-grand lorsque  $x \gtrsim x^*$ . L'abscisse de sortie est donc cette fois  $x_s = x^*$ .

Pour voir que la situation  $|x_e| = x^*$  peut donner lieu à des abscisses de sortie arbitraires entre  $x^*$  et l'infiniment grand positif, suivant les valeurs de  $x_0$ , il suffit d'utiliser la symétrie  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  dans (13).

- Si  $\varepsilon \ln |a|$  est i-petit, alors le terme  $a I(x)$  est i-grand dès que  $x \gtrsim 0$ , si bien que l'abscisse de sortie est  $x_s = 0$ . □

**Remarque.** Une deuxième méthode de preuve est d'utiliser une modification de la loupe exponentielle d'Eric Benoît, due à Jean-Louis Callot. La preuve n'est pas plus simple que la précédente, mais elle se visualise peut-être mieux, c.f. figure 6. On suppose à nouveau  $a \geq 0$  pour fixer les idées.



d'exparabole, et plusieurs cas peuvent se produire, suivant que cet arc coupe ou non les demi-droites  $\Delta_3$  et  $\Delta_4$ . Pour simplifier l'écriture, notons  $x_a = \sqrt{-2\varepsilon \ln a}$ .<sup>1</sup>

- Si  $-x_a \leq x_0$ , alors cet arc d'exparabole reste appréciablement en-dessous de  $\Delta_3$  et  $\Delta_4$ , et la solution longe toujours cet arc. Dans les variables  $x, y$ , on a ainsi  $y \simeq 0$  lorsque  $x_0 \leq x \leq -x_0$  et  $y$  i-grand lorsque  $|x| \geq |x_0|$ . La solution est donc dans le halo de la courbe lente pour  $x_0 \leq x \leq -x_0$  et quitte ce halo à l'abscisse de sortie  $-x_0$ ; la relation entrée-sortie est symétrique.
- Si  $x_0 \leq -x_a$ , alors la solution commence par longer un arc d'exparabole jusqu'au halo de la demi-droite  $\Delta_3$ , puis longe un segment vertical joignant les demi-droites  $\Delta_3$  et  $\Delta_2$ , reste piégée dans le halo de  $\Delta_2$  jusqu'au halo du point  $B = (0, a^\varepsilon)$ , puis longe l'arc d'exparabole passant par ce point, jusqu'au point  $C = (x_a, 1)$ , correspondant au point de sortie du halo de la courbe lente dans les variables  $x, y$ : l'abscisse de sortie est toujours  $x_a$  et la sortie se fait toujours du côté  $y > 0$ .
- Le cas limite  $x_0 \simeq -x_a$  peut donner lieu à toutes les abscisses de sortie supérieures ou égales à  $x_a$ , aussi bien du côté  $y > 0$  que du côté  $y < 0$ . Les abscisses de sortie strictement supérieures à  $x_a$  concernent des solutions en  $x, W$  qui longent une partie (répulsive) de  $\Delta_4$  avant de longer un arc d'exparabole (si la sortie est du côté  $y < 0$ ) ou un segment vertical puis un arc d'exparabole (si la sortie est du côté  $y > 0$ ).

## 2.5. Résumé.

Il faut retenir de ce phénomène canard des systèmes du plan les faits suivants.

1) C'est un phénomène extrêmement sensible, qui dépend du paramètre de contrôle  $a$  de l'équation de manière exponentiellement sensible par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$ . En d'autres termes, si l'équation dépend réellement de  $a$  (une certaine hypothèse dite de transversalité doit être satisfaite), alors deux valeurs à canards  $a_1$  et  $a_2$  satisfont nécessairement une majoration de la forme  $|a_1 - a_2| \leq \exp(-c/\varepsilon)$ .

2) Le fait, pour une trajectoire donnée, d'être un canard dépend finalement assez peu de la condition initiale : à partir du moment où une trajectoire est un canard, les autres trajectoires s'organisent autour d'elle selon une relation entrée-sortie.

3) Si la présence de canards est exceptionnelle concernant une équation donnée, en revanche elle est inéluctable pour une famille d'équations dépendant d'un paramètre de contrôle  $a$ , moyennant une hypothèse de transversalité par rapport à  $a$ .

---

## 3. Bifurcations de type Hopf statique et dynamique.

### 3.1. La bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

La bifurcation PAH se voit aisément sur l'exemple suivant (encore un "paradigme")

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (16)$$

---

1. Le lien entre  $x_a$  et le  $x^*$  de la preuve est  $x^* = \circ x_a$ .



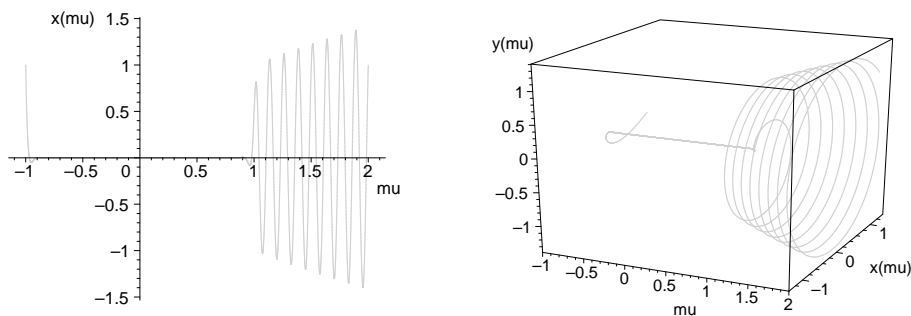
*Lorsque  $\mu$  passe par 0, la perte de stabilité s'accompagne de la naissance d'un cycle limite stable dont le rayon croît comme  $\sqrt{\mu}$ . En d'autres termes, l'état stationnaire perd sa stabilité et il apparaît un régime périodique stable (...)*

Pour le lecteur non familier avec l'énoncé précis de la bifurcation PAH, ce type de description heuristique peut être mal interprété et laisser croire que le paramètre  $\mu$  varie lentement avec le temps.

Par ailleurs il est naturel, dans une étude des bifurcations numérique ou expérimentale, de modifier lentement le paramètre de bifurcation  $\mu$  une fois un équilibre (stationnaire ou périodique) atteint, plutôt que de recommencer l'expérience depuis le même point de départ pour différentes valeurs de  $\mu$ . Par exemple certaines expériences de physique portant sur le doublement de fréquence d'oscillations dans des cuves de mercure en rotation peuvent requérir des temps de l'ordre de la semaine avant que l'équilibre ne soit atteint.

Enfin, dans la réalité, on observe effectivement des bifurcations, par exemple un dispositif physique se mettant à vibrer lorsqu'un paramètre dépasse une valeur critique (la vitesse d'écoulement d'un fluide par exemple). Une modélisation en termes de bifurcation dynamique peut s'avérer plus adéquate que la modélisation statique habituelle.

L'expérimentation numérique montre que les solutions de (18) n'ont pas du tout le comportement correspondant à la description heuristique de la bifurcation PAH, c.f. figure 7. En ce qui concerne le paradigme (18), une explication théorique est possible et contenue



**Figure 7.** La solution du système (18) de condition initiale  $x(-1) = 1, y(-1) = 0$ , avec  $\varepsilon = \frac{1}{50}$  et  $-1 \leq \mu \leq 2$ , à gauche dans le plan  $(\mu, x)$ , à droite en perspective.

dans le résultat suivant.

**Proposition 3.1.** Soit  $\mu_1$  un nombre réel limité appréciablement négatif et soit  $(x_1, y_1)$  un point limité de  $\mathbb{R}^2$  non i-proche de l'origine. Alors l'orbite de (18) partant de  $(\mu_1, x_1, y_1)$  longe la courbe lente  $x = y = 0$  depuis l'abscisse d'entrée  $\mu_e = \circ\mu_1$  jusqu'à l'abscisse de sortie  $\mu_s = -\mu_e$ .

En d'autres termes, nous avons une relation entrée-sortie symétrique autour du grand canard  $x(\mu) = y(\mu) = 0$ .

















1. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution limitée dans le halo de  $\mu = 0$ .

2. Il existe une solution formelle  $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(\mu) \varepsilon^n$  avec des coefficients  $y_n$  standard et analytiques en  $\mu = 0$ .

3. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution  $y$  infiniment petite sur  $[a, b]$  tout entier.

Ce résultat montre deux choses. D'une part, il donne une condition nécessaire et suffisante de nature algébrique sur les coefficients  $f$  et  $P$  (en réalité une infinité de conditions) pour l'existence de solutions surstables. D'autre part, il montre qu'il n'y a pas de phénomène de butée pour les équations analytiques en  $\varepsilon$  : dès qu'il existe une solution surstable dans le halo de  $\mu = 0$ , il existe aussi une solution surstable "globale" sur  $[a, b]$  tout entier. En revanche, il n'y a pas unicité de cette solution surstable. En particulier il n'est pas possible de considérer la somme usuelle de la série  $\hat{y}$  car celle-ci est en général divergente. Ce résultat trouve une application dans le problème de la résonance d'Ackerberg-O'Malley [37, 30].

Pour nous convaincre que l'hypothèse d'analyticité par rapport à  $\varepsilon$  est indispensable, le plus simple est de considérer à nouveau le paradigme (30), où on écrit  $a$  comme une fonction de  $\varepsilon$ . Nous avons vu que, si  $a$  n'est pas exponentiellement petit, alors il n'y a pas de surstabilité. Cependant, si  $a$  a un développement en  $\varepsilon$ -ombre égal à 0, autrement dit si  $|a| < \varepsilon^n$  pour tout entier  $n$  standard, alors il existe une solution formelle, donnée par  $y_n \equiv 0$  pour tout  $n$ . Par conséquent, la valeur  $a = \exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$  montre que l'énoncé 2 du théorème 3.4 n'implique pas l'énoncé 1. Par ailleurs, d'après la proposition 2.3, si  $a = \exp(-1/\varepsilon)$ , alors les solutions sur l'axe réel présentent des butées en  $\mu = -1$  et  $\mu = 1$ , ce qui montre que 1 n'implique pas 3.

### 3.7. Travaux en cours.

Ils concernent le cas d'un point tournant multiple, autrement dit lorsque  $f'(0) = 0$ . Dans [30] est présenté un résultat analogue au cas d'un point tournant simple :

*Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. Il existe une solution formelle.

2. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution  $i$ -petite dans un voisinage complexe de  $x = 0$ .

3. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution  $i$ -petite dans un voisinage complexe de tout l'intervalle  $[a, b]$ .

4. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution réelle dont toutes les dérivées d'ordre standard sont limitées sur un intervalle ouvert contenant 0.

5. Pour  $\varepsilon$   $i$ -petit, il existe une solution réelle dont toutes les dérivées d'ordre standard sont limitées sur  $[a, b]$ .

Néanmoins il peut y avoir des canards dont une des dérivées d'ordre standard prend des valeurs  $i$ -grandes dans le halo de 0. Dans cette situation, il est encore possible mais plus délicat de montrer qu'il n'y a pas de butée, c.f. les travaux de Peter De Maesschalck et Freddy Dumortier [17, 18, 19]. Dans [31], nous proposons aussi une condition nécessaire et suffisante analogue à la condition 2 du théorème 3.4. Pour cela, nous avons mis au point des développements combinés de la forme

$$\hat{y} = \sum_{n \geq 0} \left( a_n(\mu) + g_n\left(\frac{\mu}{\eta}\right) \right) \eta^n$$





d'une courbe *quasi-invariante*, c'est-à-dire une courbe d'équation  $x = \varphi(\mu)$  satisfaisant l'équation aux différences associée à (32) à exponentiellement petit près. La première méthode [27] est une adaptation au cas discret d'une technique due à A.I. Neishtadt [43], qui consiste à effectuer un grand nombre (de l'ordre de  $1/\varepsilon$ ) de changements de variables. La seconde méthode, due à Claude Baesens, est une analyse Gevrey de la solution formelle [2, 3]. Elle a été améliorée et généralisée par Abir El Rabih dans [24] au cas où  $x$  est une variable vectorielle. L'amélioration principale est l'utilisation des normes de Nagumo. Dans la même direction, mentionnons l'article [25], qui contient une étude des systèmes avec un paramètre de contrôle additionnel. Nous décrivons le contenu de ces articles dans la partie 4.6.

Des résultats de nature globale n'ont concerné au départ que le cas très restrictif des systèmes affines en  $x$ , *i.e.*

$$f(\mu, x) = a(\mu)x + b(\mu),$$

*c.f.* [28]. Ils reposent sur une adaptation de la méthode des reliefs de Jean-Louis Callot. Il se trouve que deux fonctions reliefs entrent en jeu : ce sont les parties réelles de primitives des deux déterminations principales du logarithme de la fonction  $a$  (rappelons que  $a$  prend des valeurs négatives sur l'axe réel). Précisément, en notant  $\ln$  la détermination principale du logarithme complexe sur  $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}^+)$ , les deux reliefs sont donnés par

$$\begin{aligned} R_0 : \mu &\mapsto \operatorname{Re} \left( \int_{\mu^*}^{\mu} \ln a(u) du \right) \text{ et} \\ R_1 : \mu &\mapsto R_0(\mu) + 2\pi \operatorname{Im}(\mu - \mu^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Il est montré dans [28] qu'il existe une solution discrète longeant la courbe lente d'une abscisse  $x_0$  à une abscisse  $x_n = x_0 + n\varepsilon$  (avec  $n$  de l'ordre de  $1/\varepsilon$ ) s'il est possible de joindre  $x_0$  à  $x_n$  par deux chemins, l'un descendant le relief  $R_0$  et l'autre le relief  $R_1$ . Comme dans le cas continu, des butées apparaissent sur les lignes de niveau provenant des cols de ces reliefs, qui sont des valeurs de  $x$  où  $a(x) = 1$ .

Ce n'est que longtemps après que sont apparus des résultats de nature globale pour des systèmes non linéaires généraux [29, 23]. La méthode dans [29] repose sur une linéarisation de l'équation autour de la courbe lente, qui fait apparaître la fonction  $a : \mu \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, g_0(\mu))$  et les deux reliefs précédents, puis sur le théorème du point fixe, ce qui nécessite de construire un opérateur linéaire résolvant l'équation affine et ayant de bonnes propriétés. Dans [23], la méthode est généralisée pour aborder des équations avec paramètre de contrôle. Dans cette situation, trois reliefs sont nécessaires. Le contenu de l'article [23] est brièvement décrit dans la partie 4.5.

## 4.2. Exemple.

Plutôt que de présenter plus en détails la théorie générale, nous avons choisi de présenter ce phénomène de retard sur l'exemple de la fameuse famille des applications quadratiques

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (\mu, x) \mapsto \mu x(1 - x),$$

autrement dit de regarder l'équation de récurrence

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (34)$$

Il est d'usage de ne considérer cette famille que pour  $x \in [0, 1]$  et donc pour  $\mu \in [0, 4]$ , mais dans cet article nous la considérerons sur  $\mathbb{R}^2$  en entier.



Examinons la première bifurcation. Dans le cas “dynamique” où  $\mu$  varie, l’étude de cette bifurcation ne contient pas toute la difficulté du cas général mais mérite d’être faite car la fonction relief analogue à (33) s’introduit de manière naturelle.

Considérons par exemple la trajectoire par  $F$  d’un point de la forme  $(\mu_0, x_0)$  avec  $0 < \mu_0 < 1$  et  $x_0 > 0$  pas trop grand, par exemple  $0 < x_0 < 1$ . Pour  $N$  tel que  $\mu_N \lesssim 1$  et  $n \in \{0, \dots, N\}$ , puisque  $x_{n+1} = \mu_n x_n (1 - x_n) < \mu_n x_n$ , très vite (dès que  $n\varepsilon$  est appréciable)  $x_n$  prend des valeurs exponentiellement petites, si bien que lorsque  $\mu_n$  atteint et dépasse la valeur 1, il faudra un certain temps avant que  $x_n$  ne “sorte” des exponentiellement petits et ne reprenne finalement des valeurs appréciables. Ceci explique le retard à la bifurcation. Pour faire simple, nous dirons qu’une telle orbite est une *orbite à retard*.

Un élément important dans cette explication est que la courbe lente  $x = 0$  est elle-même une *courbe invariante*, i.e. constituée d’une réunion d’orbites. Une “loupe exponentielle” permet alors de décrire le comportement des orbites autour de cette courbe invariante. Nous donnons plus de détails dans la partie 4.3.

Examinons à présent la deuxième bifurcation. A priori, rien ne permet de prédire si une orbite entrée dans le halo de la courbe lente  $x = g_0(\mu) = 1 - \frac{1}{\mu}$  avant l’abscisse  $\mu = 3$  aura ou non un retard, c’est-à-dire continuera ou non à longer la courbe lente après l’abscisse de bifurcation 3. Dans la partie 4.4, nous présentons un résultat dû à Jean-Louis Callot, qui dit qu’il existe des orbites avec retard. Le fait que toutes les orbites susceptibles d’avoir un retard en ont effectivement un, ce que confirme l’expérimentation, a été une question ouverte pendant longtemps.

Une loupe exponentielle autour d’une courbe invariante permettrait de montrer qu’il existe des orbites avec retard, mais la courbe lente  $x = g_0(\mu)$  n’est plus invariante par  $F$  et rien ne permet d’affirmer *a priori* qu’il en existe une  $i$ -proche de cette courbe lente sur un intervalle contenant 3. D’ailleurs, comme le montre la proposition 4.4, il n’est pas plus facile de montrer qu’il existe une courbe invariante que de trouver des orbites à retard.

La figure 12 montre l’orbite du point initial  $\mu_0 = 1$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ , avec la valeur  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ . La seule différence parmi les quatre figures est la précision de calcul utilisée. Cette figure illustre bien le fait que ce phénomène de retard a une sensibilité exponentielle. Son caractère “robuste”, i.e. le fait qu’il se présente pour toutes les orbites dans un système ne dépendant pas d’un paramètre de contrôle additionnel, en est d’autant plus inattendu.

Concernant notre exemple de la famille quadratique, les résultats principaux de [29] sont les suivants.

**Théorème 4.1.** Soit  $\mu^* > 2$  déterminé par  $\int_1^{\mu^*} \ln |2 - \mu| d\mu = 0$ . Il existe une fonction analytique  $\varphi : ]1, \mu^*[ \rightarrow \mathbb{R}$ , solution de l’équation aux différences

$$x(\mu + \varepsilon) = \mu x(\mu)(1 - x(\mu)) \quad (39)$$

telle que  $\varphi(\mu)$  est  $i$ -proche de  $g_0(\mu)$  donné par (35) pour tout  $\mu$  vérifiant  $1 \lesssim \mu \lesssim \mu^*$ .

Numériquement on trouve  $\mu^* \approx 5,59112$ . Compte tenu du caractère introductif du présent article, il nous semble hors de propos de donner une preuve du théorème 4.1. Ce résultat a les conséquences suivantes sur le comportement des orbites du système discret (37).



peut éventuellement être allongé par rapport à ce que prévoit la relation entrée-sortie, *c.f.* remarque 2 ci-dessous après la proposition 4.3.

### 4.3. Loupe exponentielle et relation entrée-sortie.

Revenons sur la première bifurcation au point  $\mu = 1$ ,  $x = 0$ . Nous avons avancé une explication qualitative sur le fait que les orbites de (37) présentent un retard. On peut quantifier ce retard en utilisant une loupe analogue à la loupe exponentielle ayant servi pour le paradigme des canards, *c.f.* (15). On obtient ainsi le résultat suivant.

**Proposition 4.3.** *Soit  $M_0 = (x_0, \mu_0) \in ]0, 1[^2$  standard. L'orbite de  $M_0$  par  $F$  entre dans le halo de la courbe lente  $x = 0$  à l'abscisse  $\mu_0$  et en sort à l'abscisse  $\mu_s \in ]1, e[$  donnée par la relation entrée-sortie  $\int_{\mu_0}^{\mu_s} \ln \mu \, d\mu = 0$ .*

IDÉE DE PREUVE. On pose  $W_n = \varepsilon \ln x_n$ , ce qui donne pour équation de récurrence  $W_{n+1} = \varepsilon \ln \mu_n + W_n + \varepsilon \ln(1 - x_n)$ , avec pour condition initiale  $W_0 = \varepsilon \ln x_0 \simeq 0$  (et avec  $\mu_n = \mu_0 + n\varepsilon$ ). Du fait que  $x_n$  prend vite des valeurs exponentiellement petites, une analyse détaillée assure que le terme  $\varepsilon \ln(1 - x_n)$  peut être négligé, si bien que la formule donnant  $W_n$  est approchée par une somme de Riemann, elle-même approchée par l'intégrale correspondante : si  $N$  est tel que  $x_n$  est i-petit pour tout  $n$  i-grand  $n \leq N$ , on a

$$W_N = W_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln \mu_n + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln(1 - x_n) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln \mu_n \simeq \int_{\mu_0}^{\mu_N} \ln \mu \, d\mu. \quad (40)$$

Un raisonnement analogue à celui à la fin de la preuve de la proposition 2.1 permet alors de conclure.  $\square$

**Remarques.** 1. C'est pour simplifier l'énoncé que nous avons supposé  $x_0$  et  $\mu_0$  standard. S'ils ne le sont pas, il suffit de remplacer  $x_0, \mu_0 \in ]0, 1[$  par  $0 \leq x_0, \mu_0 \leq 1$  dans les hypothèses et  $\mu_0$  par son ombre dans les conclusions.

2. Dans le cas où  $\mu_0 \leq 0$ , il est possible que l'orbite longe la courbe lente plus longtemps que ne le prévoit la relation entrée-sortie. Ceci est dû au fait que l'orbite traverse une *valeur superstable* pour  $\mu = 0$ . Si on pose  $W_n = \varepsilon \ln |x_n|$ , l'estimation (40) s'adapte pour le début :

$$W_N = W_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln |\mu_n| + \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln(1 - x_n) \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \ln |\mu_n| \tau \quad (41)$$

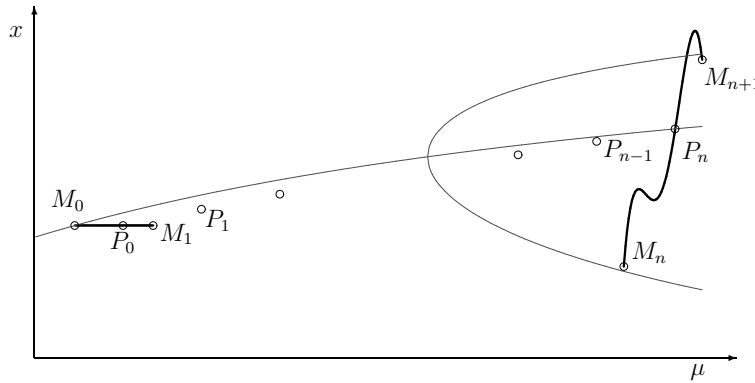
mais, pour pouvoir conclure  $W_N \simeq \int_{\mu_0}^{\mu_N} \ln |\mu| \, d\mu$ , il est nécessaire de supposer que  $\varepsilon \ln \mu_n$  reste i-petit, y compris au moment où  $\mu_n$  traverse 0. Dans le cas contraire, lorsque  $\mu_0$  et  $\varepsilon$  sont tels que  $\mu_0 + n\varepsilon$  est exponentiellement petit pour un certain  $n$ , le retard est allongé. C'est un phénomène spécifique des systèmes discrets.

3. Dans le cas général d'un système de la forme (32), muni d'une courbe lente continue  $x = g_0(\mu)$ , attractive pour  $\mu < \mu^*$  et répulsive pour  $\mu > \mu^*$ , la loupe exponentielle permet de déterminer la relation entrée-sortie (en l'absence de traversée de valeur de superstabilité), à condition d'avoir déjà une orbite à retard. Grâce à cette loupe, on démontre de manière analogue le résultat suivant.



**Proposition 4.5.** *Le système (37) a des orbites à retard autour du point de bifurcation  $(3, \frac{2}{3})$ .*

IDÉE DE PREUVE (Jean-Louis Callot). Soit  $M_0 = (\mu_0, x_0)$  avec  $1 \lesssim \mu_0 \lesssim 3$  et par exemple  $x_0 = g_0(\mu_0)$ . Considérons l'orbite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $M_0$  par  $F$  donnée par (38) et supposons que cette orbite n'a pas de retard. Pour  $n$  tel que  $\mu_n \lesssim 1 + \sqrt{6}$ , puisque l'orbite de période 2 est attractive,  $M_n$  est i-proche d'une des deux branches et  $M_{n+1}$  est i-proche de l'autre branche.



**Figure 13.** *Construction d'une orbite ayant un retard à partir d'une orbite n'en ayant pas.*

A présent, soit  $T_0$  le segment  $[M_0, M_1]$  et soit  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des itérés de ce segment par  $F$ , i.e.  $T_{k+1} = F(T_k)$ , c.f. figure 13. Alors  $T_n$  est le graphe d'une fonction continue sur  $[\mu_n, \mu_{n+1}]$  et joignant  $M_n$  et  $M_{n+1}$ , donc coupant la courbe lente en un point  $P_n$ , image par  $F^n$  d'un point  $P_0 = (\tilde{\mu}_0, \tilde{x}_0) \in T_0$ . Puisque la courbe lente est attractive à gauche du point de bifurcation et répulsive à sa droite, l'orbite  $(\tilde{\mu}_k, \tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $P_0$  longe la courbe lente pour  $\tilde{\mu}_k \lesssim 3$  et aussi pour  $\tilde{\mu}_k \gtrsim 3$ . Une étude plus approfondie, utilisant le fait que  $f$  est de classe  $C^3$ , montre que cette orbite est i-proche de la courbe lente aussi pour les  $k$  tels que  $\tilde{\mu}_k \simeq 3$ . □

### 4.5. Canards discrets.

Dans le cas d'une bifurcation sans oscillations dite *tangente* (c'est-à-dire  $a(\mu^*) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu^*, g_0(\mu^*)) = 1$  dans le cas dérivable), le retard à la bifurcation n'a généralement pas lieu pour un système fixé. En revanche il peut avoir lieu pour une famille de systèmes dépendant d'un paramètre de contrôle supplémentaire. D'un certain point de vue, la bifurcation de dédoublement de période correspond à la bifurcation de Hopf du cas continu, alors que la bifurcation tangente correspond à la situation des canards et à la surstabilité <sup>2</sup>.

2. On peut voir cette analogie en se rappelant que la stabilité d'un équilibre d'un système différentiel est fonction des parties réelles des valeurs propres (l'équilibre est stable si  $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) alors que celle d'un système discret est fonction de leur module (stable si  $|\lambda| < 1$ ). Une valeur de surstabilité correspond dans le premier cas à  $\lambda = 0$  et dans le deuxième à  $\lambda = 1$ . Une valeur de bifurcation sans surstabilité correspond dans le premier cas à  $\text{Re}(\lambda) = 0$  et  $\lambda \neq 0$  et dans le deuxième à  $|\lambda| = 1$  et  $\lambda \neq 1$ .





Cette théorie des canards discrets a été développée par Abir El Rabih. Ses résultats montrent qu'effectivement il n'existe pas toujours de courbe canard, et qu'une preuve d'existence nécessite des hypothèses d'analyticité de la fonction  $f$ . Dans [23], l'auteur étudie des équations de la forme (43), avec  $f$  de la forme  $f(\mu, x, \alpha) = \mu x + \varepsilon g(\mu, x, \alpha)$  et avec une hypothèse de transversalité de  $g$  par rapport à  $\alpha$ . L'article démontre l'existence de courbes canards pour certaines valeurs de  $\alpha$  lorsque  $g$  est analytique par rapport à  $\mu$  et  $x$ . De plus ce résultat peut être qualifié de "semi-global" : la construction d'une courbe canard utilise trois "reliefs" analogues à ceux de (33) et l'examen de ces reliefs permet de préciser un domaine naturel d'existence de la courbe canard. C'est un domaine accessible dans le sens suivant : pour chacun des trois reliefs  $R_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , il existe un point  $x_j$  sur la frontière du domaine tel que tout point du domaine peut être joint à partir de  $x_j$  par un chemin descendant  $R_j$ .

L'article présente aussi un exemple (avec  $g$  non analytique en  $\mu$ ) dans lequel il n'y a pas de courbe canard, pour aucune valeur de  $\alpha$ . Dans cet exemple, il y a bien des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles certaines orbites ont un retard, mais ces valeurs de  $\alpha$  dépendent de la condition initiale.

#### 4.6. En dimension supérieure.

Le problème de retard à la bifurcation des systèmes discrets a aussi été étudié dans le cas où  $x$  est une variable vectorielle. Mentionnons dans cette direction les travaux d'Abir El Rabih [24] et d'Abir El Rabih et Reinhard Schäfke [25]. L'article [24] contient une étude de systèmes de la forme (avec les notations changées par soucis de cohérence)

$$x(\mu + \varepsilon) = F(\mu, x(\mu))$$

avec l'hypothèse  $\frac{\partial F}{\partial x} - I$  et  $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$  inversibles au point de bifurcation. L'auteur démontre l'existence d'une solution formelle unique et le caractère Gevrey de cette solution. Dans une certaine mesure, il s'agit d'une généralisation à  $x$  vectoriel des travaux de C. Beasens [2], avec une amélioration substantielle : l'utilisation des normes de Nagumo simplifie beaucoup les preuves. Les techniques sont analogues à celles de [12], avec en plus l'utilisation d'inverses d'opérateurs aux différences inspirés de ceux de [29]. L'absence de point tournant évite d'avoir à recourir à un paramètre de contrôle supplémentaire et il n'y a pas de canard à proprement parler.

Dans [25], les auteurs étudient des systèmes de la forme  $x(\mu + \varepsilon) = F(\mu, x(\mu), \alpha)$  avec  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$  et un paramètre de contrôle  $\alpha \in \mathbb{C}^m$  et l'hypothèse de transversalité  $(\frac{\partial F}{\partial x} - I, \frac{\partial F}{\partial \alpha})$  de rang maximal au point de bifurcation. Il s'agit donc d'une étude des véritables canards.

Les deux références [24, 25] apportent des réponses relativement complètes pour des systèmes discrets généraux avec  $x$  vectoriel, pour ce qui concerne l'étude locale. En revanche beaucoup de questions restent en suspens pour une étude "semi-globale" dans l'esprit de ce qui est fait dans [23, 29].

---

## A. Appendice : petit lexique d'analyse non standard.

Pour le lecteur qui n'est pas familier avec l'analyse non standard, nous donnons ci-dessous un bref descriptif. Nous tenons à préciser que ce descriptif n'est pas suffisant pour



- [5] E. BENOÎT, « Relation d'entrée-sortie », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, n° 293, 293-296, 1981.
- [6] E. BENOÎT, « Tunnels et entonnoirs », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, n° 292, 283-286, 1981.
- [7] E. BENOÎT, J.-L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, « Chasse au canard », *Collect. Math.*, vol. 31, n° 1-3, 37-119, 1981.
- [8] E. BENOÎT, A. FRUCHARD, R. SCHÄFKE, G. WALLET, « Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, vol. 7, n° 4, 627-658, 1998.
- [9] N. BERGLUND, « Dynamic Bifurcations : Hysteresis, Scaling Laws and Feedback Control », *Progress of Theoretical Physics*, Supplement No.139, 325-336, 2000.
- [10] J.-L. CALLOT, « Champs lents-rapides complexes à une dimension lente », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 26, 149-173, 1993.
- [11] J.-L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, « Le problème de la “chasse au canard” », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, vol. 286, 1059-1061, 1978.
- [12] M. CANALIS-DURAND, J.-P. RAMIS, R. SCHÄFKE, Y. SIBUYA, « Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations », *J. Reine Angew. Math.*, vol. 518, 95-129, 2000.
- [13] B. CANDELPERGHIER, « “Valeurs à canards” pour l'équation :  $\varepsilon z'(t) = t(z(t) - f(t)) + a(\varepsilon)$  », prépublication Nice, 1990.
- [14] B. CANDELPERGHIER, F. DIENER AND M. DIENER, « Retard à la bifurcation : du local au global », in *Bifurcations of Planar Vector Fields proceedings of the Luminy conference*, JP Françoise and R. Roussarie Ed., *Lect. Notes Math.*, vol. 1455, Springer, Berlin, 1-19, 1990.
- [15] P. CARTIER, « Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard », *Sém. Bourbaki 580*, Astérisque vol. 92-93, Soc. Math. France, 21-44, 1982.
- [16] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of differential equations*, New York, McGraw-Hill, 1955.
- [17] P. DE MAESSCHALCK, F. DUMORTIER, « Canard solutions at non-generic turning points », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 358, n° 5, 2291-2334, 2006.
- [18] P. DE MAESSCHALCK, « Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order », *Com. Pure Appl. Anal.*, vol. 6, n° 2, 311-333, 2007.
- [19] P. DE MAESSCHALCK, « Gevrey properties of real planar singularly perturbed systems », *J. Differential Equ.*, vol. 238, n° 2, 338-365, 2007.
- [20] F. DIENER, « Les équations  $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x}^{[s]} + x = a$  », *Collect. Math.*, vol. 29, 217-247, 1978.
- [21] F. DIENER ET M. DIENER, « Sept formules relatives aux canards », *C. R. Acad. Sci.*, Série I, vol. 297, 577-580, 1983.
- [22] F. DIENER, G. REEB, *Analyse Non Standard*, Hermann, Paris, 1989.
- [23] A. EL RABIH, « Canards solutions of difference equations with small step size », *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 9, n° 10, 911-931, 2003.
- [24] A. EL RABIH, « Existence of local analytic solutions for systems of difference equations with small step size », *Funkcial. Ekvac.*, vol. 48, n° 2, 313-330, 2005.
- [25] A. EL RABIH, R. SCHÄFKE, « Overstable analytic solutions for non-linear systems of difference equations with small step size containing an additional parameter », *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 11, n° 3, 183-213, 2005.
- [26] THOMAS FORGET, Thèse de Doctorat, La Rochelle, 2007.
- [27] A. FRUCHARD, « Canards et râteaux », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 42, n° 1-2, 825-855, 1992.
- [28] A. FRUCHARD, « Sur l'équation aux différences affine du premier ordre unidimensionnelle », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 46, n° 1, 139-181, 1996.



- [53] G. WALLET, « Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension un », *Ann. Inst. Fourier*, vol. 40, n° 3, 557-595, 1990.
- [54] G. WALLET, « Overstability in Arbitrary Dimension », in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math., vol. 1493, 57-70, 1991.
- [55] G. WALLET, « De la bifurcation retardée à la surstabilité ou du différentiable réel à l'analytique complexe », Thèse d'Etat, Poitiers, 1991.
- [56] W. WASOW, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965.

---

## Table des matières

<b>1 Introduction.</b>	<b>432</b>
1.1 Le problème. . . . .	432
1.2 A propos du contenu de l'article. . . . .	432
<b>2 Les canards de l'équation de van der Pol forcée.</b>	<b>433</b>
2.1 L'équation originelle. . . . .	433
2.2 L'équation de van der Pol forcée. . . . .	435
2.3 Les canards ont la vie brève. . . . .	440
2.4 Le paradigme. . . . .	441
2.5 Résumé. . . . .	444
<b>3 Bifurcations de type Hopf statique et dynamique.</b>	<b>444</b>
3.1 La bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf. . . . .	444
3.2 Bifurcation dynamique. . . . .	445
3.3 Les tourbillons de Claude Lobry et Guy Wallet. . . . .	447
3.4 La méthode des reliefs de Jean-Louis Callot. . . . .	449
3.5 Commentaires. . . . .	451
3.6 Equations analytiques par rapport à $\varepsilon$ . . . . .	453
3.7 Travaux en cours. . . . .	454
<b>4 Systèmes dynamiques discrets.</b>	<b>455</b>
4.1 Introduction. . . . .	455
4.2 Exemple. . . . .	456
4.3 Loupe exponentielle et relation entrée-sortie. . . . .	460
4.4 Systèmes oscillants du plan. . . . .	461
4.5 Canards discrets. . . . .	462
4.6 En dimension supérieure. . . . .	464
<b>A Appendice : petit lexique d'analyse non standard.</b>	<b>464</b>
<b>B Bibliographie</b>	<b>465</b>